6.2.3 几类可降阶的高阶微分方程

——降阶法

1. $y^{(n)} = f(x)$

2. $y'' = f(x, y')$

3. $y'' = f(y, y')$

1. $y^{(n)} = f(x)$ 型

例1. 求解 $y''' = e^{2x} - \cos x$.

解: $y'' = \int \left(e^{2x} - \cos x \right) dx$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} - \sin x + C_1'$$

$$y' = \frac{1}{4} e^{2x} + \cos x + C_1' x + C_2$$

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} + \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

(此处 $C_1 = \frac{1}{2} C_1'$)

1. $y^{(n)}=f(x)$ 型的解法

两端积分得 n-1阶方程

$$y^{(n-1)}=\int f(x)\,\mathrm{d}x+C_1$$

同理可得 $y^{(n-2)}=\int\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x+C_1\right]\mathrm{d}x+C_2$

$$=\int\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x+C_1x+C_2$$

n 次积分后, 可得含 n 个任意常数的通解 .

2. $y'' = f(x, y')$ 型　　缺少 y

设 $y' = p(x)$，则 $y'' = p'$，原方程化为一阶方程

$$\frac{dp}{dx} = p' = f(x, p)$$

若能解出 $\quad p = \varphi(x, C_1)$

即 $\quad y' = \varphi(x, C_1)$

再一次积分，得原方程的通解

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2$$

求解$(1 + x^2)y'' = 2xy' \Rightarrow (1 + x^2)(y')' = 2xy'$

例3. 求解 $\begin{cases} (1+x^2)y'' = 2xy' \\ y\big|_{x=0} = 1,\quad y'\big|_{x=0} = 3 \end{cases}$

解： $y' = p(x)$，则 $y'' = p'$， 代入方程得

$$(1+x^2)p' = 2xp \xrightarrow{\text{分离变量}} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)}$$

积分得 $\ln|p| = \ln(1+x^2) + \ln|C_1|$， 即 $p = C_1(1+x^2)$

利用 $y'\big|_{x=0} = 3$，得 $C_1 = 3$， 于是有 $y' = 3(1+x^2)$

两端再积分得 $y = x^3 + 3x + C_2$

利用 $y\big|_{x=0} = 1$，得 $C_2 = 1$， 因此所求特解为

$$y = x^3 + 3x + 1$$

3. $y'' = f(y, y')$ 型　　缺少 x

令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

故方程化为 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$ 设其通解为 $p = \varphi(y, C_1)$,

即 $y' = \varphi(y, C_1)$ 分离变量 $\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx$,

得原方程的通解 $\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$

如：求解 $yy'' - y'^2 = 0$

y'是关于x的函数,但为了求解, 先把它看成关于y的函数. 在 $y' = p(y)$中, y是中间变量

例4. 求解 $yy''-y'^2=0$.

解: 设 $y'=p(y)$, 则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

代入方程得 $y\cdot p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=0$,

设 $p\neq 0$ (丢失解 $y=C$) 则 $\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$

两端积分得 $\ln|p|=\ln|y|+\ln|C_1|$, 即 $p=C_1y$,

$\therefore \quad y'=C_1y$ (可分离变量方程)

故所求通解为 $y=C_2e^{C_1x}$

取 $C_1=0$, 则得 $y=C_2$, 找回丢失的解

例5. 解初值问题 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y\big|_{x=0} = 0\,,\quad y'\big|_{x=0} = 1 \end{cases}$

解：令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 代入方程得

$$p\,\mathrm{d}p = e^{2y}\,\mathrm{d}y$$

积分得 $\quad \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1$

利用初始条件, 得 $C_1 = 0$, 所以 $p^2 = e^{2y} \Rightarrow p = \pm\sqrt{e^{2y}}$

根据 $p\big|_{y=0} = y'\big|_{x=0} = 1 > 0$, 得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = e^{y}$

积分得 $-e^{-y} = x + C_2$, 再由 $y\big|_{x=0} = 0$, 得 $C_2 = -1$

故所求特解为 $\quad 1 - e^{-y} = x$

可降阶的高阶微分方程的解法

——降阶法

1. $y^{(n)} = f(x)$ 逐次积分

2. $y'' = f(x, y')$ 缺少 y

令 $y' = p(x)$，则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

3. $y'' = f(y, y')$ 缺少 x

令 $y' = p(y)$，则 $y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

4. $y'' = f(y')$ 既缺少 x,又缺少 y

令 $y' = p(x)$ 或 $y' = p(y)$